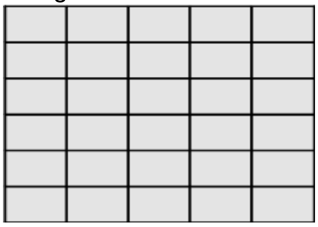
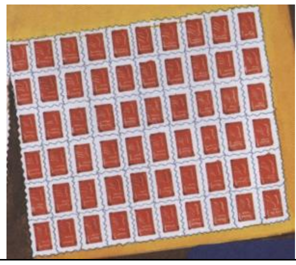
La multiplication

Le sens complexe de la multiplication

1- La multiplication est une opération qui, à partir de deux nombres, donne un autre nombre appelé produit.

J'utilise la multiplication pour calculer rapidement un nombre d'objets rangés de la même manière. La multiplication permet d'éviter une addition répétée.	
Observe ce rectangle  Combien possède t-il de carreaux ?	Quel est le nombre total de timbres ? 
Je peux additionner le nombre de carreaux par lignes ou par colonnes **5+5+5+5+5+5 = 30 ou** **6+6+6+6+6 = 30** **Mais je peux aussi écrire** **5 x 6 = 30** **6 x 5 = 30** Mise en évidence de la commutativité	**Je compte le nombre de lignes et de colonnes** **6 lignes** **10 colonnes** **Le nombre de timbres est** **10 x 6 = 60** **6 x 10 = 60**
J'utilise la multiplication pour résoudre des problèmes.	
Un jardinier a cueilli 4 bouquets de 12 roses  Combien a-t-il cueilli de roses ?	Il est payé 13 € de l'heure. Il a travaillé 6 h. Combien a-t-il gagné ? 
Je peux écrire **Le nombre de roses est** **12 + 12 + 12 + 12 = 48** **12 x 4 = 48** **4 x 12 = 48**	**Quel calcul effectuer ?** **13 x 6 =** **6 x 13 =**

2- Mais il faut prendre conscience de la complexité pédagogique de l'introduction de la multiplication et se poser la question de la manière dont on conçoit ce produit

Extraits du dossier de J L Brégeon sur les techniques opératoires

Exemple 1 (évaluation CE2-2000)**:** l'élève devait calculer mentalement le produit 13x2 et la consigne demandée à l'enseignant était de « dicter 13x2 » (sans aucune autre indication sur les mots à prononcer).
Une enquête auprès d'enseignants montre que ceux-ci ont dicté de trois manières différentes : « treize fois deux » ; « deux fois treize » et « treize multiplié par deux ». Selon le choix effectué (particulièrement « deux fois treize »), les réussites des élèves ne sont pas identiques…

En fait, ces trois traductions sont valides et ne peuvent pas être mises en question : seulement, chaque traduction est porteuse d'un sens qui facilite ou non l'obtention du résultat par l'élève.

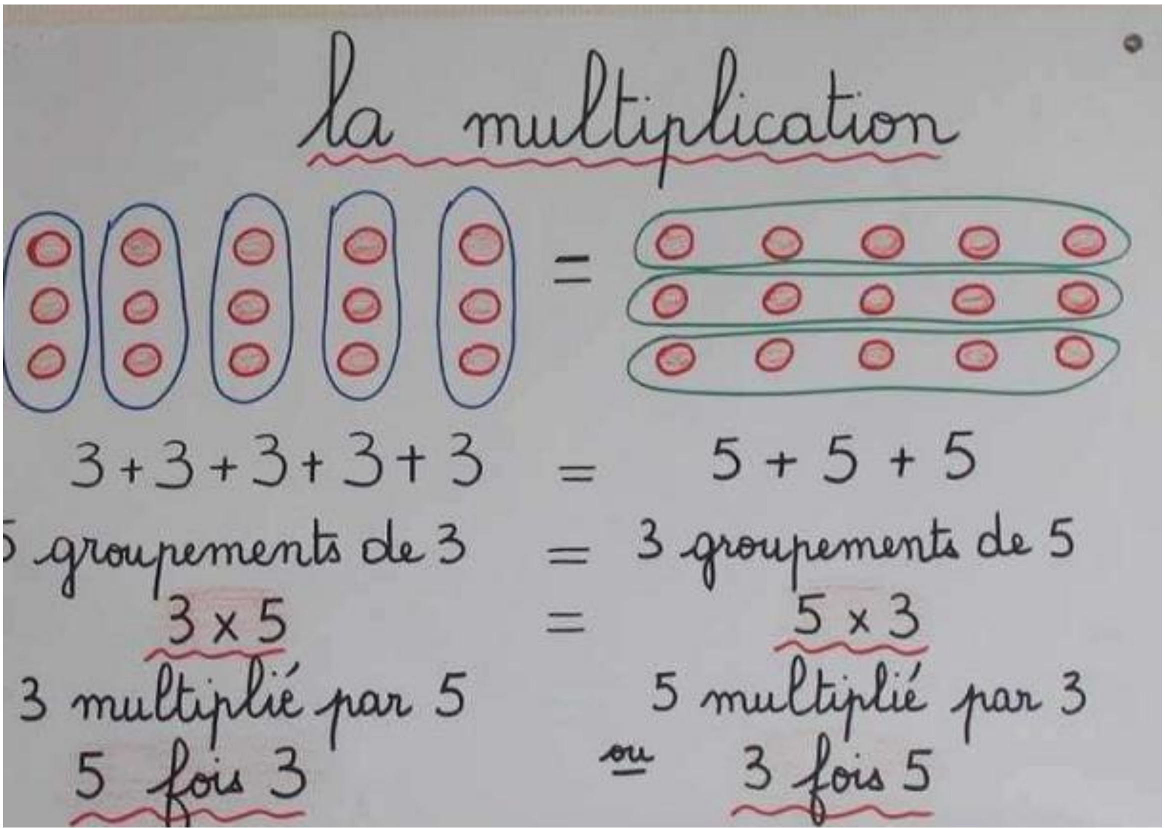
Exemple 2 : Dans le même ordre d'idée, il faut se poser la question de l'écriture d'un produit résultant de la traduction mathématique d'un problème. Par exemple :

« Un jardinier a cueilli 4 bouquets de 12 roses. Combien a-t-il cueilli de roses ? »

La compréhension immédiate de cette situation conduit à faire une traduction en 4 fois 12 roses.
Comment écrire 4 fois 12 avec le signe x ?
Une tradition tenace (cohérente sur le plan mathématique, mais discutable sur le plan pédagogique) invite à écrire « 4 fois 12 » sous la forme 12 x 4.
On peut s'étonner de l'insistance à vouloir imposer aux élèves une telle disposition d'écriture (écriture de droite à gauche par rapport à une lecture qui se fait de gauche à droite)

A l'école primaire, l'origine provient probablement de l'habitude, jusque dans les années 1970, de noter les unités dans les calculs. On écrit ce qu'on cherche en premier (des roses) et on multiplie par le nombre de bouquets.
L'élève devait écrire : 12 roses dans un bouquet x 4 bouquets = 48 roses

Exemple 3 : Analyse d'un affichage proposé aux élèves



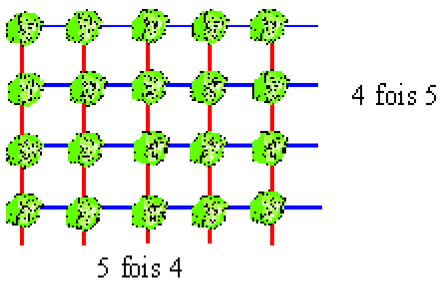
3- Concevoir une programmation cohérente de l'introduction de la multiplication

a- La construction du sens de la multiplication et du produit de deux nombres doit s 'appuyer sur la représentation première de l'opération, c'est-à-dire sur l'idée que, quand on multiplie, on répète plusieurs fois le même nombre et qu'on obtient ainsi un nombre plus grand.

Ainsi, 4 fois 3 est l'écriture qui exprime l'action d'additionner 4 fois le nombre 3 (on agit sur le nombre 3 en le répétant 4 fois) : 4 fois 3 = 3 + 3 + 3 + 3. De la même manière, 3 fois 4 exprime l'action d'additionner 3 fois le nombre 4 (on agit sur le nombre 4 en le répétant 3 fois) : 3 fois 4 = 4 + 4 + 4. Ces deux actions sont distinctes mais produisent le même résultat.

Il faut proposer aux élèves de produire différentes écritures additives répétées en relation avec le mot fois, afin d'installer ce sens premier de la multiplication.

b- Introduire le signe x en faisant d'emblée le choix de la commutativité.

Les salades du jardin		« 4 fois 5 » donne le même résultat que « 5 fois 4 » (20 salades). Cela correspond à un nombre qu'on appelle le produit de 4 et de 5, qu'on note 4 x 5 ou 5 x 4 et qu'on énonce « 4 multiplié par 5 » ou « 5 multiplié par 4 ».

Le choix est de ne pas lier directement l'ordre de ce qui est dit avec l'ordre de ce qui est écrit et de permettre la lecture ou l'écriture dans les deux sens.

En effet, si l'on est intransigeant sur l'ordre d'écriture du produit, comment faire comprendre aux élèves, à qui l'on a dit que le prix de 120 barres de chocolat à 3 euros la barre doit s'écrire impérativement 3 x 120 (120 fois 3 ; le multiplicateur est 120), que lorsqu'ils posent la multiplication pour calculer le résultat, ils doivent écrire de préférence :

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times \quad 3 \\ \hline \end{array}$$

Préalables à la multiplication posée

1- Un apprentissage progressif et indispensable de la table de multiplication

► Pour mémoriser un produit, il faut être capable *(Roland Charnay)*

- de le représenter (ex : 5 x 3 en lignes et colonnes) Voir fiche quadrillages-produits
- de l'identifier (ex : 6 x 4 c'est aussi 4 x 6, 4+4+4+4+4+4, 6+6+6+6)
- de raisonner (ex : 7 x 5 c'est 5 de plus que 6 x 5)

► Avant de mémoriser <u>les</u> tables de multiplication, il faut raisonner autour de <u>la</u> table de multiplication (table de Pythagore)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

- La construire avec les élèves en constatant certaines propriétés (en particulier la commutativité)
- Examiner les relations entre les tables pour établir une progression

<u>Exemple</u> : après la table de 2, les tables de 4 et de 8 peuvent être reconstruites.
Même remarque après la table de 3 pour 6 et 9.
La seule n'ayant aucun lien avec les autres, donc a priori la plus difficile à mémoriser, c'est la table de 7. Mais, en réalité, il ne reste alors que 7 x 7 à apprendre. Tous les autres peuvent être retrouvés par commutativité (Exemple : 7 x 8 et 8 x 7 ....)

Une progression basée sur cette réflexion donnerait donc : x2, x5, puis x 4, x 8 puis x 3, x6, x9 et enfin x 7.

- S'appuyer sur la diversité des procédures

<u>Exemple</u> : "un de plus". Si je connais 5 x 7, alors je connais 6 x 7 car c'est 1 x 7 de plus

► Proposer une mémorisation <u>des tables</u> qui a du sens

Présentation 1		Présentation 2	
1 fois 2	2	2 fois 1	2
2 fois 2	4	2 fois 2	4
3 fois 2	6	2 fois 3	6
4 fois 2	8	2 fois 4	8
5 fois 2	10	2 fois 5	10
6 fois 2	12	2 fois 6	12
7 fois 2	14	2 fois 7	14
8 fois 2	16	2 fois 8	16
9 fois 2	18	2 fois 9	18
10 fois 2	20	2 fois 10	20
C'est celle qui s'appuie le mieux sur le sens de la multiplication tel que l'enfant le perçoit. Il peut ainsi établir plus facilement des associations entre les nombres. Par exemple, s'il sait « 4 fois 2 » (8), il peut déduire « 5 fois 2 » (10) car c'est 8 + 2.		Cette présentation ne permet pas le raisonnement. Il ne peut s'agir alors que d'un apprentissage par cœur sans construction de sens.	

► Exploiter les produits dérivés de la table de multiplication (cycle 3)

<u>Exemple :</u>

Soit la situation : " 4 objets coûtent 14€, combien coûtent 28 objets ? "

Les erreurs des enfants ne viennent pas du fait qu'ils n'ont pas compris la proportionnalité car ils réussissent si on leur propose le calcul pour 8 objets au lieu de 28. Elles proviennent du fait qu'ils ne voient pas directement le rapport entre 4 et 28. C'est un problème de maîtrise de la table de multiplication.

Maîtriser la table de multiplication, c'est non seulement connaître les résultats mais c'est aussi en connaître " les produits dérivés " comme le rapport entre 4 et 28, la décomposition de 28 en différents produits…

► Apprendre à mémoriser aussi en classe (situations ludiques, activités d'entraînement)

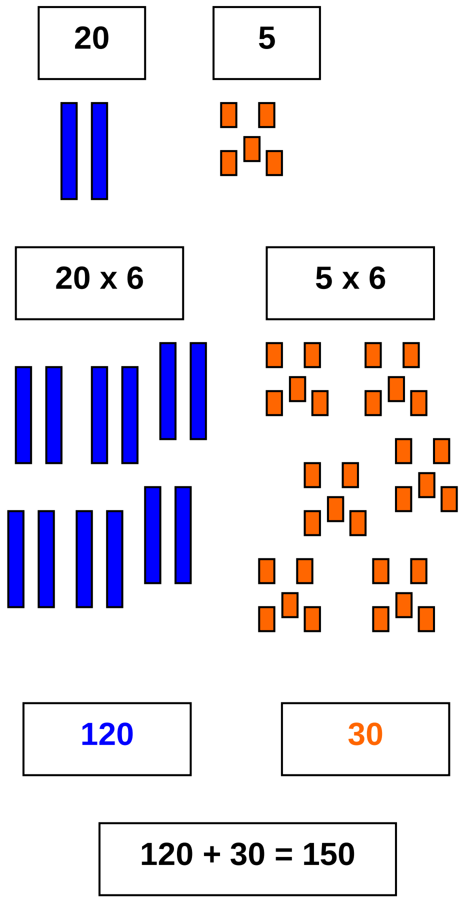
Jeu du chronomètre
Jeu de Pythagore
Jeu du multiplicato et règle
Jeu du memory et de bataille
Tables de multiplication - ACIM

2- Une connaissance des règles de la numération décimale

La compréhension de la technique usuelle de la multiplication nécessite la coordination de plusieurs types de connaissances : *(doc calcul posé – Roland Charnay)*

- tables de multiplication ;
- numération décimale pour la gestion des retenues, dans les multiplications intermédiaires puis dans l'addition finale ;
- règle des 0 : passage du résultat de la multiplication d'un nombre par 3 à la multiplication de ce même nombre par 30, par 300… ;
- distributivité de la multiplication sur l'addition

Ce dernier point est très important car il conditionne l'apprentissage de la technique de la multiplication. Ex :



25 x 6 c'est 20 x 6 plus 5 x 6

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 5 \\ \times & & 6 \\ \hline & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 5 & 0 \end{array}$$

5 x 6

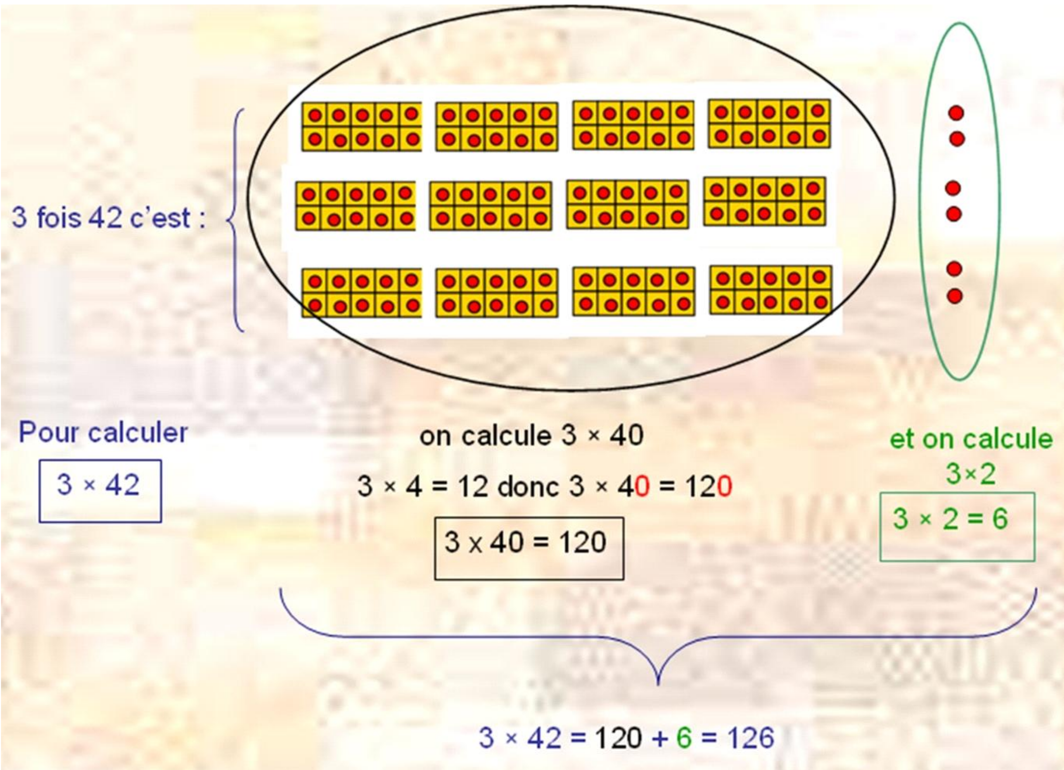
20 x 6

La technique opératoire

Multiplication d'un nombre entier par un nombre à 1 chiffre

La compréhension de la technique opératoire passe par la <u>décomposition des nombres</u>.

Multiplication - Pernoux



Il est important de faire correspondre les résultats du calcul par décomposition aux lignes de l'opération posée, pour une meilleure préparation à la multiplication à plusieurs chiffres.
A portée de maths – Hachette – CE2

Passage du tableau à la multiplication posée

Exemple : 426 x 5

x	400	20	6
5	5 x 400 = 2 000	5 x 20 =100	5 x 6 = 30

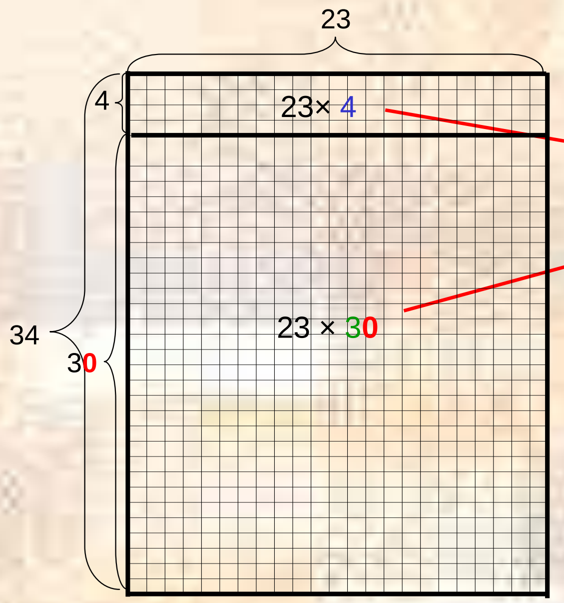
		4	2	6
x				5
			3	0
		1	0	0
	2	0	0	0
	2	1	3	0

Technique de la multiplication

	4	$\overset{3}{2}$	6	On multiplie d'abord les unités par 5 : 5 x 6 = 30.
x			5	On pose **0** et on retient 3 **dizaines**.
			0	
	$\overset{1}{4}$	$\overset{3}{2}$	6	On multiplie ensuite les dizaines par 5 : 5 x 2 = 10.
x			5	On ajoute la retenue : 10 + 3 = 13.
		3	0	On pose **3** et on retient 1 **centaine.**
	$\overset{1}{4}$	$\overset{3}{2}$	6	On multiplie enfin les centaines par 5 : 5 x 4 = 20.
x			5	On ajoute la retenue : 20 + **1** = 21. On écrit **21**.
2	**1**	3	0	

Multiplication d’un nombre entier par un nombre à plusieurs chiffres

Disposition habituelle des calculs :



		2	3
×		3	4
		9	2
	6	9	0
	7	8	2

3°) Multiplications avec des nombres comportant plus de deux chiffres

Calcul de 127 × 352

		1	2	7		
×		3	5	2		
		2	5	4	←	2 × 127
	6	3	5	0	←	50 × 127
3	8	1	0	0	←	300 × 127
4	4	7	0	4		

Calcul de 127 × 302

		1	2	7		
×		3	0	2		
		2	5	4	←	2 × 127
	0	0	0	0	←	0 × 127
3	8	1	0	0	←	300 × 127
3	8	3	5	4		

D. Pernoux http://pernoux.perso.orange.fr

Dans tous les cas, les élèves sont aidés par l’écriture explicite des « 0 » (qui doit être préférée au traditionnel principe de décalage), ainsi que par celle des produits partiels en marge du calcul à effectuer – Doc accompagnement des programmes

Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier

Une explication possible de la technique tient au fait que, par exemple, le résultat de 157,23 x 45 peut être obtenu en calculant d'abord 15 723 x 45, puis en divisant le résultat par 100, car 157,23 c'est 15723 divisé par 100. Le travail sur cette technique suppose donc une bonne compréhension des nombres décimaux (valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture à virgule), ainsi que celle de la multiplication et de la division par 10, 100…, dont on sait qu'elle est source de difficultés pour de nombreux élèves.

Partir d'une courte situation problème

Un croissant coûte 0,85 €. Quel est le prix de 6 croissants ?

Un aide mémoire pour l'élève peut comporter :

► Des **exemples de situations** illustrant le **sens** de la multiplication.

► **Un ou des exemples d'opérations posées** avec des indications sur la présentation à respecter

Traits à la règle

Ecriture du signe x

Un chiffre par ligne ou par colonne

Ecriture des « 0 »

Je multiplie un nombre entier par un nombre entier : 245 x 157

			2	2	
			~~3~~	~~3~~	
			2	4	5
		x	1	5	7
		1			
		1	7	1	5
	1	2	2	5	0
	2	4	5	0	0
	3	8	4	6	5

Boîte à retenues

M	C	D

Présence importante des « 0 »

Je multiplie un nombre décimal par un nombre décimal : 24,5 x 1,57

		2	2		
		~~3~~	~~3~~		
		2	4 ,	5	
	x	1 ,	5	7	
	1				
	1	7	1	5	
1	2	2	5	0	
2	4	5	0	0	
3	8 ,	4	6	5	

245 : 10 → 1 chiffre après la virgule

157 : 100 → 2 chiffres après la virgule

Je calcule sans tenir compte des virgules
Je compte le nombre total de chiffres après la virgule (ici 3)
Je laisse 3 chiffres après la virgule au résultat

38465 : 1000 → 3 chiffres après la virgule

► La table de multiplication

Construire les tables au cycle 2

Table de 4		
addition	multiplication	résultat
	0 X 4	0
4	1 X 4	
4 + 4		
4 + 4 + 4		
4 + 4 + 4 + 4		
4 + 4 + 4 + 4 + 4		
4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4		
4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4		
4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4		
4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4		
4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4		

Analyser la table au cycle 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

► Un relevé des erreurs éventuelles

Exemple 1 : 1,54x1000

Application à tort de la règle des entiers : 1,54000
Déplacement inexact de la virgule : 15,4
Multiplication de la partie entière : 1000,54 et/ou de la partie décimale 1000,54000

Exemple 2 : multiplication d'un décimal par un entier **7 x 0,3 ≠ 0,21**

S'appuyer sur le premier sens de la multiplication (additions réitérées)
0,3 + 0,3 …..

Exemple 3 : multiplication d'un décimal par un entier ou de deux décimaux
Le résultat (le produit) ne semble pas possible car inférieur.

Ex : Tu achètes un morceau de comté du Jura pesant 0,5 kg. Le kg de fromage coûte 10,60 €. Combien vas-tu payer ?

10,60 x 0,5 = 5,30 €
Utiliser la correspondance diviser le résultat par 10. *0,5 = 5/10. Multiplier un nombre par 5/10 c'est le multiplier par 5 et 0,5 kg c'est 2 fois moins que 1 kg.*

Exemple 3 : des résultats où seule la virgule est fautive. On peut se demander si l'alignement des virgules des deux nombres donnés n'induit pas un alignement de la virgule pour le résultat.

```
  4,28
x 3,5
______
```