

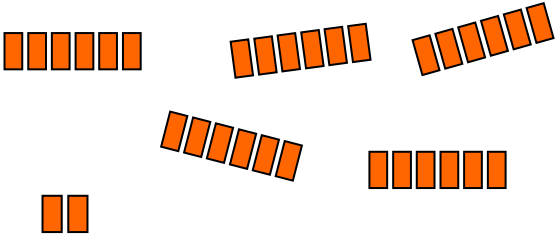



La division

Les deux sens de la division : partage et groupement

La division peut avoir deux sens : celui de partage et celui de groupement. Il est donc important de présenter cette opération en contexte à l'aide de problèmes.

<p>La division peut intervenir dans des situations de partage, de distribution, ... situations où on est amené à chercher « la valeur d'une part » On parle alors de division partition.</p>	<p>La division peut intervenir dans des situations de regroupement, ..., situations où on est amené à chercher « le nombre de parts » On parle alors de division quotient.</p>
<p>28 oiseaux sont placés dans 4 cages différentes. Combien y a-t-il d'oiseaux par cage ?</p>	<p>28 oiseaux sont répartis en groupes de 4. Combien faut-il de cages ?</p>
	
<p>$4 \times ? = 28$ $28 : 4 = 7$ Il y a 7 oiseaux par cage</p>	<p>$4 \times ? = 28$ $28 : 4 = 7$ Il faut 7 cages.</p>
<p>Je distribue 32 cartes entre 5 joueurs Combien de cartes aura chaque joueur ?</p> 	<p>Des baguettes identiques mesurent 23 cm chacune. La longueur totale des baguettes juxtaposées est 276 cm. Combien a-t-on mis de baguettes ?</p> 
<p>Chaque joueur aura 6 cartes et il en reste 2 que je ne peux pas distribuer. Je peux écrire $32 = (5 \times 6) + 2$</p>	<p>Je cherche combien de baguettes de 23 cm je peux aligner dans 276 cm. $276 = 23 \times ?$ $276 : 23 = 12$ Je peux aligner 12 baguettes.</p>
<p>Diviser, c'est bien chercher le nombre de fois où un nombre est contenu dans un autre nombre.</p>	

Remarques

La compréhension des notions de partage et de regroupement ne nécessite pas dans un premier temps le recours à la division posée mais à un raisonnement pouvant conduire à des procédures personnelles..

Au CM, la division peut prendre des sens complémentaires

La recherche du terme inconnu d'un produit

Un rectangle dont la surface mesure 30 cm² a une longueur de 6 cm. Quelle est sa largeur ?

La division fraction (proportionnalité, moyennes)

Au collège, ma sœur a obtenu 16 en français, 14 en maths, 15 en sciences et 12 en histoire. Quelle est la moyenne de ses notes?

Préalables à la division posée

► Maîtriser la numération de position, entière puis décimale

- savoir écrire un nombre entier dans un tableau de numération
- savoir écrire un nombre décimal dans un tableau de numération
- savoir lire un nombre entier et décimal
- identifier le rang des chiffres dans un nombre entier et décimal
- compléter un nombre décimal par des « 0 » $3,4 = 3,400$

1000	100	10	1	1/10	1/100	1/1000
milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes

► Manipuler les tables d'addition et de multiplication

- mémorisation des tables jusqu'à 10
 - calculs en ligne
 - construction du répertoire multiplicatif d'un nombre
- exemple*

Je prépare mon répertoire multiplicatif :

37×1	37×2	37×3	37×4	37×5	37×6	37×7	37×8	37×9
37	74	111	148	185	222	259	296	353

► Maîtriser la multiplication par 10, 100, 1000, ... des nombres entiers. Cette fonction est importante pour la recherche du nombre de chiffres du quotient et des approches successives du quotient (encadrements)

Exemple : clé des maths – CM1 – Belin

Je retiens Trouver le nombre de chiffres d'un quotient

Pour trouver le nombre de chiffres du quotient, j'encadre le dividende par des produits du diviseur par 10, 100, 1 000, 10 000 ou 100 000.

<p>Exemple : Pour 257 divisé par 4</p> <p>257 →</p> <p>$4 \times 10 < 257 < 4 \times 100$</p> <p>Le quotient est entre 10 et 100, c'est donc un nombre à 2 chiffres.</p>	<p>Liste des multiples de 4</p> <p>$4 \times 10 = 40$</p> <p>$4 \times 100 = 400$</p> <p>$4 \times 1000 = 4000$</p> <p>$4 \times 10000 = 40000$</p> <p>$4 \times 100000 = 400000$</p>	<p>Pour 873 divisé par 4</p> <p>← 873 →</p> <p>$4 \times 100 < 873 < 4 \times 1000$</p> <p>Le quotient est entre 100 et 1000, c'est donc un nombre à 3 chiffres.</p>
---	---	---

► Connaître la relation entre multiple et diviseur et quelques critères de divisibilité

Définition : Un nombre a est un multiple d'un nombre b ($b \neq 0$) lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0 (c'est-à-dire lorsque « la division tombe juste »).

a est un multiple de b
 b est un diviseur de a
 a est divisible par b

8 est multiple de 4 car :

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

217 est un multiple de 7 car :

$$\begin{array}{r|l} 217 & 7 \\ \hline 07 & 31 \\ \hline 0 & \end{array}$$

On dit aussi que :

4 est un diviseur de 8

8 est divisible par 4

7 est un diviseur de 217

217 est divisible par 7

Critères de divisibilité

▪ **Un nombre est divisible par 2 (ou est un multiple de 2)** si son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8

Exemples :

1 798 ; 11 200 ; 145756 sont divisibles par 2

▪ **Un nombre est divisible par 3 (ou est un multiple de 3)** si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3

Exemples :

12654 est divisible par 3 car $1+2+6+5+4=18$ et 18 est divisible par 3 ($6 \times 3 = 18$)

132621 est divisible par 3 car $1+3+2+6+2+1=15$ et 15 est divisible par 3 ($5 \times 3 = 15$)

▪ **Un nombre est divisible par 4 (ou est un multiple de 4)** si le nombre composé des deux derniers chiffres est divisible par 4

Exemples :

1716 est divisible par 4 car le nombre formé des deux derniers chiffres est 16 et 16 est divisible par 4. ($4 \times 4 = 16$)

6924 est divisible par 4 car le nombre formé des deux derniers chiffres est 24 et 24 est divisible par 4. ($6 \times 4 = 24$)

▪ **Un nombre est divisible par 5 (ou est un multiple de 5)** si son chiffre des unités est 0 ou 5

Exemples :

2 795 ; 23 200 ; 145755 sont divisibles par 5

▪ **Un nombre est divisible par 9 (ou est un multiple de 9)** si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9

Exemples :

12654 est divisible par 9 car $1+2+6+5+4=18$ et 18 est divisible par 9 ($9 \times 2 = 18$)

189261 est divisible par 9 car $1+8+9+2+6+1=27$ et 27 est divisible par 9 ($9 \times 3 = 27$)

Difficultés à surmonter pour aller vers la division

Jean Luc Bregeon – PIUFM Auvergne

1. Une bonne aisance des opérations (addition, multiplication, soustraction) : la technique usuelle nécessite l'emploi simultané de ces 3 opérations
2. Une bonne aisance du calcul mental
3. Une parfaite connaissance des tables de multiplication
5. Maintien en mémoire de résultats partiels
6. Les écrits successifs pour constituer le quotient sont le résultat d'une approximation

Le calcul posé à l'école élémentaire – Programmes 2002 – Roland Charnay

Il s'agit d'un calcul « à risque », insécurisant, dans la mesure où un chiffre essayé au quotient n'est jamais absolument certain. C'est également le seul calcul où l'estimation intervient en cours de calcul, alors que, pour les autres opérations, elle intervient soit au début, soit à la fin comme instrument de prévision ou de contrôle.

Il faut également souligner le peu d'usage qui est actuellement fait de cette technique... et en tirer la conséquence : plus encore que pour les autres opérations, le travail doit être principalement orienté vers la compréhension de l'articulation des différentes étapes du calcul.


La division est la seule opération dans laquelle un chiffre calculé peut ne pas être définitif.

Des étapes avant d'apprendre la technique opératoire

► Notions de partages équitables et non équitables

1 On veut partager 693 euros entre 3 personnes.

- Combien de billets et de pièces de chaque sorte chacun aura-t-il ?
- Quelle somme d'argent cela représente-t-il ?



Clé des maths – CM1

La notion de partage équitable introduit les contraintes aux différentes situations de partage et de distribution

- répartir tous les objets
- donner le même nombre à chacun
- en laisser le moins possible

► Situations problèmes et recherches personnelles – Ecritures mathématiques

1- Données simples et vérifiables

Ex : Il faut partager 51 cubes entre 4 enfants. Chacun doit recevoir la même quantité de cubes, et le plus possible.

Permettre la manipulation, les dessins, les regroupements, ...

Comparer les procédures

Favoriser ensuite l'écriture mathématique : $51 = (4 \times 12) + 3$

2- Nombres plus complexes

On dispose de 1836 carreaux pour paver une terrasse rectangulaire. Sur un côté de la terrasse, il faut placer une ligne de 15 carreaux. Combien de lignes de carreaux pourra-t-on placer ?

Encourager les calculs approchés (essais multiplicatifs, multiples de 10, l'utilisation de techniques opératoires connues (addition, soustraction, multiplication), les dispositions en colonne ...

Comparer les procédures

Favoriser ensuite l'écriture mathématique : $1836 = (15 \times 122) + 6$

3- Recherche d'un énoncé à partir de l'écriture mathématique (pour comprendre cette écriture)

$$71 = (. \times 9) + 8$$

$$45 = (7 \times 6) + .$$

$$134 = (12 \times .) + .$$

Exemples de textes

- Combien de livres à 9 € peut-on acheter avec 71 € ?
- On veut mettre 45 oeufs en boîtes de 6. Combien en restera-t-il ?
- On range 134 bouteilles dans des casiers de 12 bouteilles. Il faut combien de casiers ?

4- Données faisant intervenir d'autres paramètres (mesures, relations entre unités de mesure, prix)

Exemples :

- Combien de morceaux d'élastique de 48 cm de long peut-on couper dans une bande de 3 mètres ?
- A partir d'un sac de riz de 100 kg, combien de sachets de 3 kg peut-on remplir ?
- Un sportif veut courir 5 000 m chaque jour. Il s'entraîne sur une piste de 145 m de long. Combien de tours de piste doit-il faire chaque jour ?
- Avec 1238 €, combien de livres à 13 € peut-on acheter au maximum ?

► **Calcul réfléchi de quotients et de restes**

En effet, ce type de calcul donne l'occasion aux élèves de mettre en œuvre, en acte, des compétences également sollicitées dans l'exécution de la technique opératoire.

- *On procède à un partage successif des centaines, dizaines et unités*

Ex : Calcul du quotient et du reste dans la division de 725 par 3

→ 7 centaines partagées en 3 parts : 2 centaines dans chaque part et il en reste une
On a donc 12 dizaines à partager : 2 (2 est le chiffre des dizaines dans 725) plus les 10 qui proviennent de la centaine restante.

→ 12 dizaines partagées en 3 parts : 4 dizaines dans chaque part et il n'en reste pas

→ 5 unités à partager en 3 parts : 1 unité par part et il en reste 2.

D'où la réponse : quotient : 241 reste : 2

- *On incite à décomposer*

Ex : Diviser mentalement 1 548 par 7

1 538 est décomposé en 1 400 + 148, après avoir repéré que 1 400 est divisible par 7 (résultat : 200),

148 en 140 + 8 pour déterminer les deux autres composantes du quotient (20 et 1) et le reste (1).

Le quotient s'obtient par addition des quotients partiels : 200 + 20 + 1 = 221.

La technique opératoire de la division de deux entiers

Charnay - calcul posé au cycle 3

Dans toutes les circonstances, trois recommandations peuvent être faites :

1 - Commencer le calcul par une estimation du nombre de chiffres du quotient

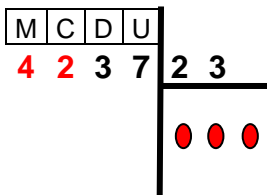
La recherche du nombre de chiffres du quotient :

- évite de donner un quotient ayant un ordre de grandeur manifestement erroné
- permet de garder du sens (on sait mieux, à tout moment la somme que va toucher chaque gagnant)
- est une aide pour compenser certaines erreurs au moment de la mise en œuvre de la technique opératoire

Ex : 23 personnes jouent un même ticket et gagnent 4237 € au loto

On veut partager équitablement les 4237 € entre les 23 gagnants

Méthode par raisonnement



4 est plus petit que 23. On ne peut pas donner 1000 € à chaque gagnant.

42 est plus grand que 23. On peut donc donner des parts de 100 € à chaque gagnant.

Le quotient sera un nombre à trois chiffres.

Cette méthode nécessite la lecture du nombre de dizaines, centaines, milliers d'un nombre donné.

Méthode par encadrement

J'encadre le dividende (4237) entre des multiples du diviseur (23) terminés par des zéros.

$$2300 < 4237 < 23000$$

$$23 \times 100 < 4237 < 23 \times 1000$$

Le quotient est compris entre 100 et 1 000 => 3 chiffres au quotient.

Cette méthode nécessite la maîtrise de la multiplication par 10, 100, 1000.

- 2 - S'autoriser à poser des produits annexes, à la suite d'une première estimation du chiffre cherché dans le quotient
- 3 - Encourager la pose effective des soustractions et le raisonnement par nombres de milliers, centaines, dizaines, unités

Ex : 24 flibustiers veulent se partager équitablement 3750 pièces d'or. Combien auront-ils chacun ?

$1 \times 24 = 24$	}	37
$2 \times 24 = 48$		
$3 \times 24 = 72$		
$4 \times 24 = 96$		
$5 \times 24 = 120$	}	135
$6 \times 24 = 144$		
$7 \times 24 = 168$		
$8 \times 24 = 192$	}	150
$9 \times 24 = 216$		

Pour favoriser la compréhension, la production de la totalité de «la table du diviseur» ne doit pas être encouragée. Favoriser la recherche de calculs intermédiaires. Roland Charnay

Nombre de milliers : $3 < 24$. Je ne peux pas donner 1000 pièces à chaque flibustier.

Nombre de centaines : $37 > 24$. On peut donner des parts de 100 pièces à chaque flibustier. Chacun aura 1 part de 100. $100 \times 24 = 2400$
Il reste 1350 pièces à partager.

Nombre de dizaines : $135 > 24$. On peut donner des parts de 10 pièces à chaque flibustier. Chacun aura 5 parts de 10. $50 \times 24 = 1200$
Il reste 150 pièces à partager.

Nombre d'unités : $150 > 24$. On peut donner des parts de 1 pièce à chaque flibustier. Chacun aura 6 pièces. $6 \times 24 = 144$
Il reste 6 pièces qu'on ne peut pas partager.

	M	C	D	U	
	3	7	5	0	24
-	2	4	0	0	100
	1	3	5	0	50
-	1	2	0	0	6
	1	5	0		156
-	1	4	4		
	0	6			

On peut écrire : $3750 = (156 \times 24) + 6$

Les flibustiers auront 156 pièces d'or chacun et il reste 6 pièces qu'on ne peut partager.

La technique opératoire de la division décimale

La division décimale permet d'obtenir soit la valeur exacte du quotient, soit la valeur approchée du quotient (le quotient peut être un nombre décimal)

1) Division décimale d'un nombre entier par un nombre entier

$$\begin{array}{r} 137 \\ 17 \\ 1 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 4 \\ 34 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137,00 \\ 17 \downarrow \\ 10 \downarrow \\ 20 \\ 0 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 4 \\ 34,25 \end{array}$$

1) On effectue la division euclidienne (elle ne tombe pas juste – dans l'exemple il reste 1)

2) On rajoute un zéro au reste et on met la virgule au quotient

3) On peut continuer la division en rajoutant à chaque fois un zéro au reste

Rappel : $137 = 137,00$

34,25 est la valeur exacte du quotient de 137 divisé par 4 (car le reste est égal à 0)

Quel intérêt de poursuivre le calcul d'un quotient décimal ?

On peut travailler sur le sens à partir de situations concrètes, certaines qui nécessitent qu'on continue la division après les unités, et d'autres non.

Avec 24 élèves, on veut faire 5 équipes contenant le même nombre d'enfants. Combien y aura-t-il d'enfants dans chaque équipe ? ==> Va-t-on partager le reste ? Non, on ne peut pas couper un enfant en plusieurs parties, ça n'aurait pas de sens de faire des équipes de 4,8 enfants.

Le jour de la rentrée, un professeur distribue équitablement 100 stylos à ses 30 élèves. Combien de stylos aura chaque enfant ? ==> Va-t-on partager le reste ? Non, il faudrait couper les stylos, ça n'aurait pas de sens de donner 3,33 stylos à chaque élève.

5 copains se partagent équitablement un gain de 24 euros. Quelle somme reçoit chaque personne ? ==> On peut partager ce qui reste, ça va être des centimes ! Quand on partage des euros, on obtient des centimes.

Une cuisinière répartit équitablement 500g de compote dans huit pots. Quelle quantité de compote y aura-t-il dans chaque pot ? ==> On peut partager ce qui reste, ça va être des dg, cg, mg.

2) Division d'un nombre décimal par un nombre entier

$$\begin{array}{r}
 174,5 \quad | \quad 5 \\
 \underline{24} \\
 45 \\
 \underline{0} \\
 34,9
 \end{array}$$

- 1) On effectue la division de la partie entière du dividende par le diviseur : $174 \div 5$
- 2) Dès que l'on descend le chiffre qui est juste après la virgule (dans l'exemple le 5) on met la virgule au quotient.
- 3) On peut ensuite continuer la division comme précédemment.

Comment expliquer une situation où le dividende est inférieur au diviseur ? Parce que ce n'est pas une situation de partage.

Partir de situations simples et concrètes. Les nombres compris entre 0 et 1 présentent beaucoup de difficultés pour les élèves, car ils ne se comportent pas comme on pourrait s'y attendre après avoir exercé les nombres entiers : les élèves conçoivent difficilement que le résultat d'une multiplication puisse être inférieur à l'un des facteurs ou le quotient supérieur au dividende dans une division. Beaucoup d'élèves hésiteront sur l'opération à choisir lorsque ces nombres interviennent, en particulier quand les différentes significations des opérations ne sont pas encore bien installées. Pour se faire une représentation, il faut concevoir que la division puisse être autre chose qu'un partage; Il faudra proposer aux élèves des problèmes qui font appel aux différentes significations de la division pour qu'ils puissent affronter cette difficulté.

Ex : Une personne suit un régime et perd 4,3 kg en 6 jours. De combien a-t-elle maigri par jour ?

$$\begin{array}{r}
 4,3000 \quad | \quad 6 \\
 \underline{43} \\
 10 \\
 \underline{40} \\
 40 \\
 \underline{4} \\
 4...
 \end{array}$$

0,716 est la valeur approchée par défaut au millième près de $4,3 \div 6$

Ex :

5 kg de pommes de terre coûtent 4,50 €. Quel est le prix du kilo ?

Rappel de la progression des programmes

CE1- Division par 2 et 5 avec un quotient exact entier

CE2- Division de deux entiers (quotient entier avec diviseur à 1 chiffre)

CM1- Division de deux entiers (quotient entier avec diviseur à 2 chiffres)

CM1- Division de deux entiers (quotient décimal)

CM2- Division d'un décimal par un entier