

Dossier réalisé à partir des documents d'accompagnement des programmes 2002

Enjeux de l'enseignement du calcul

Le calcul mental a une **fonction sociale**.

Il est d'abord un calcul d'usage. Il s'agit de mettre en place des moyens efficaces de calculer, utiles dans la vie courante, en l'absence de supports ou d'instruments. Même si l'usage de la calculette est de plus en plus répandu, il demeure nécessaire de savoir calculer sans elle, ou, à tout le moins, de pouvoir effectuer un calcul approché. C'est là d'ailleurs un moyen efficace de contrôle, une erreur de manipulation étant toujours possible.

Le calcul mental a une **fonction pédagogique**.

Sans disponibilité rapide des résultats des tables, il n'y a pas d'accès possible aux techniques opératoires : dans le cas de la multiplication, à l'entrée en sixième les erreurs de table sont plus fréquentes que celles qui sont dues à une mauvaise maîtrise de l'algorithme de calcul.

Trois objectifs

- l'automatisation des calculs simples, orientée vers la production de résultats immédiatement disponibles : récupération en mémoire ou reconstruction instantanée, procédures automatisées ;

- la diversification des stratégies de calcul complexe : calcul réfléchi ou raisonné ;

- une première maîtrise du calcul approché, souvent utilisé dans la vie courante et dont l'apprentissage doit se poursuivre au collège.

Que signifie « calcul mental » ?

En première approximation, on peut être tenté d'opposer le calcul *mental* au calcul *écrit*. Ce qu'on désigne sous le terme de calcul écrit ("l'opération posée") requiert la connaissance des tables et la gestion des retenues, donc du calcul mental. Il ne dispense donc pas de calculer mentalement, bien au contraire ; la technique écrite française traditionnelle de la division, avec ou sans les soustractions intermédiaires requiert de nombreux traitements mentaux. Le déficit de maîtrise du calcul mental fragilise gravement l'apprentissage des techniques écrites.

Par ailleurs, l'expérience atteste, depuis des dizaines d'années, que les enfants ont souvent tendance à calculer mentalement en appliquant les algorithmes écrits.

ex : calcul de $127+16$. Certains élèves calculent le résultat à la manière d'une addition posée (je calcule $6+7$, ça fait 13, je pose 3 et je retiens 1 ...) ce qui est beaucoup plus lourd en charge mentale de travail que d'ajouter successivement 10 et 6 par exemple.

L'expression de "**calcul mental**", signifie qu'**entre l'énoncé du problème et l'énoncé du résultat, on renonce à utiliser toute opération posée** (technique opératoire usuelle). Cela n'implique pas qu'aucun support écrit ne puisse intervenir dans la consigne, dans la formulation du résultat voire même dans le cours du calcul. Les expressions "calcul réfléchi" et « calcul raisonné », considérées comme équivalentes, sont clairement préférables à celle de "calcul rapide", autrefois en usage. Elles insistent sur l'importance donnée à la **méthode** (choix d'une stratégie, élaboration d'une procédure) plutôt qu'à la rapidité d'exécution, au moins en ce qui concerne les calculs complexes.

Il convient de distinguer **ce qu'il faut mémoriser ou automatiser** (les tables, quelques doubles et moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure...) et **ce qu'il faut être capable de reconstruire** (et qui relève du calcul réfléchi : idée de rendre plus simple un calcul, souvent en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur ce qui est connu).

La première condition d'une mémorisation réside dans la **compréhension des opérations** en jeu. L'élève est d'abord capable de calculer « quatre plus trois » parce qu'il est capable d'évoquer « quatre objets réunis avec trois objets » ou parce qu'il sait que le résultat est le nombre qui est situé «trois après quatre» sur la bande numérique, donc parce que l'addition *a du sens* pour lui.

Le réinvestissement, c'est la capacité à utiliser ce qu'on sait pour obtenir d'autres résultats : « quatre plus trois, c'est un de plus que trois plus trois », « quatre fois sept, c'est le double de deux fois sept ». La mise en place de points d'appui est donc une étape décisive de la mémorisation : connaissance des doubles, décompositions en appui sur le nombre cinq, complément à dix pour la table d'addition ; carrés, tables de deux et de cinq... pour la multiplication.

Calcul automatisé

Il y a calcul automatisé quand

- on fait appel à un résultat mémorisé
Ex : nous savons que $3 \times 7 = 21$ sans réfléchir
- on utilise un algorithme mémorisé
Ex : nous savons que pour calculer $857-438$, on peut poser une opération en colonne puis effectuer les calculs.

L'entraînement, indispensable, n'est pas le seul ressort de la mémorisation.

Les équipes de cycle ont donc à examiner soigneusement dans quelle mesure les différentes conditions de la mémorisation sont prises en charge à l'école. Car si le travail d'entraînement est souvent assuré par les familles, l'essentiel des activités qui contribuent à une bonne mémorisation relèvent bien du travail scolaire qui ne peut être limité au contrôle de ce qui doit être su.

Il y a nécessité de :

Consolider les images mentales des petits nombres : les représentations des nombres sont intériorisées en prenant appui sur des représentations imagées. On trouve les constellations (dés, dominos, jeu de cartes, cartes à points) ou les figurations à l'aide des doigts.

Mettre les nombres entiers en relation

- la succession (comptine des nombres ordonnée)
- le surcomptage et le décomptage sur la bande numérique

un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf	dix	onze			
----	------	-------	--------	------	-----	------	------	------	-----	------	--	--	--

Surcomptage : L'enfant dénombre 4 cubes, il en ajoute 2 et dit "5", "6". Il ne recompte pas tout mais surcompte à partir de 4.

Décomptage : 25 élèves et 3 absents (24, 23, 22 sur la bande numérique)

- l'appui sur les « doubles » connus : ($5+4$, c'est 1 de plus que $4+4$)
- les rythmes de la numération décimale
 - la répétition des chiffres : (répétition des unités à l'intérieur des dizaines)
 - l'usage des opérateurs simples $+1$, $+10$, -1 , -10

La mémorisation des résultats des tables d'addition et de multiplication est favorisée par une bonne maîtrise des rythmes. Pour l'addition, une première étape est marquée par la reconnaissance du fait qu'ajouter 1 revient à dire le nombre suivant.

Utiliser les propriétés des nombres et des opérations

- commutativité de l'addition et de la multiplication
- décompositions additives des nombres inférieurs à 10
- passage à la dizaine pour calculer $8+5$ (complément à 10)
- comptage de n en n

L'utilisation de certaines propriétés des opérations permet d'économiser la quantité de résultats à mémoriser, en particulier la commutativité (« quatre plus sept c'est comme sept plus quatre »). Pour l'addition, à l'issue de l'apprentissage, certaines personnes n'ont mémorisé qu'une partie du répertoire et, à partir de là, reconstruisent l'autre partie, alors que d'autres ont mémorisé tous les résultats.

Comprendre le sens des opérations

Ex: on mémorise $4+3$ si on est capable

- d'évoquer 4 objets réunis avec 3 objets
- de repérer le nombre situé « 3 après 4 » sur la bande numérique
- de reconstruire ce résultat

Apprendre à utiliser ce qu'on sait déjà pour obtenir d'autres résultats

Ex : 6×8 c'est 8 de plus que 5×8

4×7 c'est le double de 2×7 ...

Avec des points d'appui comme :

- Les doubles et les compléments à dix pour l'addition.
- Les tables de 2 et de 5 et la connaissance des carrés pour la multiplication.

Il vaut mieux éviter de :

- Pratiquer la répétition verbale rituelle des tables dans l'ordre. (variations possibles : ordre croissant et décroissant, dans le désordre, à partir du résultat, d'un support lacunaire, d'un jeu, de la table d'addition ...)
- D'avoir un recours systématique aux doigts (ou à toute forme de matériel : jetons, dominos, ...)

Calcul réfléchi

Il ne s'agit plus de récupérer une procédure ou un résultat en mémoire mais d'élaborer une procédure à un calcul particulier dont on ne connaît pas tout de suite le résultat.

Chaque individu choisit ou utilise un procédé de calcul en fonction de sa mémorisation, ses habitudes, ses connaissances.

Exemples

25x12 : calcul séparé de 25×10 et de 25×2 , puis somme des résultats partiels.

25x12 : décomposition de 12 en 4×3 , et calcul de 25×4 , puis ce résultat 100×3 $(25 \times 4) \times 3$

25x12 : multiplication de 12 par 100, puis division du résultat par 4

25x12 : décomposition de 25 : $20 \times 12 + 5 \times 12$

25x19 : calcul de 25×20 (directement ou par $25 \times 2 \times 10$), puis soustraction de 25 au résultat obtenu.

25x19 = 19×25 Calcul de 19×20 (par $19 \times 2 \times 10$), puis de 5×19 (nouveau calcul réfléchi qui peut être traité par la somme de 5×10 et de 5×9 , par exemple)

25x19 : calcul de 25×10 puis de 25×9 ($25 \times 10 - 25$)

Problème de la **mémorisation des calculs intermédiaires et des procédures** → intéressant de noter sur un brouillon

Problème : Combien y a-t-il d'images dans 4 paquets de 10 images ?

4 paquets de 10 images → 72% de réussite

10 paquets de 4 images → 43% de réussite

Aucune procédure ne s'impose a priori. Le travail en classe doit porter sur l'explicitation et la confrontation des procédures : écriture au tableau, justification, discussion sur leur pertinence et leur efficacité et synthèse de l'enseignant.

Exemples : $23 + 9$ ou $44 + 9$.

Il est commode d'utiliser la suite d'opérateurs $+10$ suivi de -1 mais ce procédé a ses limites: pour $30 + 9$ ou pour $31 + 9$, d'autres procédures plus rapides sont disponibles. Et même pour $44 + 9$, certains élèves peuvent préférer ajouter successivement 6 et 3 à 44, simplement parce qu'ils ont du mal à reculer dans la suite des nombres. **Certaines procédures peuvent être pointées comme souvent efficaces, mais liberté doit être laissée à l'élève de choisir la procédure qu'il est le mieux à même de mener à son terme.**

Autre exemple, un véritable "problème de calcul" est posé, une opération pour laquelle il n'existe pas de stratégie clairement privilégiée (ex. $348 + 257$). Dans ce cas, la rapidité d'exécution n'est nullement un objectif, et l'on favorisera l'explicitation des procédures des uns et des autres. Ceci dans le but d'en faire découvrir de nouvelles et ultérieurement de pouvoir les utiliser.

Calcul mental réfléchi ne signifie pas toujours absence d'écrit

La mémoire est fortement mobilisée par l'énoncé, la recherche du calcul ou de la procédure, les résultats intermédiaires...

On peut donc utiliser

- La copie de l'énoncé au tableau
- L'écriture de résultats intermédiaires
- La représentation imagée (dessin, croquis, constellation)
- La catégorisation ou l'utilisation d'outils mathématiques (ex : tableau de numération, bande numérique, compteur, ...)

Quand et comment pratiquer le calcul mental ?

Le calcul mental est d'abord un moyen efficace de calculer. Il doit donc être le plus souvent possible intégré aux autres activités

Des moments spécifiques doivent néanmoins être réservés à la pratique du calcul automatisé et réfléchi

Les programmes préconisent une **pratique quotidienne d'au moins 15 minutes**

Les moments d'entraînement doivent permettre de

- renforcer les acquis
- contrôler les acquisitions

Sur un temps court (5 min) et rythmé

- Procédé type « La Martinière »

- Avec l'aide d'outils (bande à compléter, compteur, cartes, ...)

Objectif	Durée	Dispositif	Commentaires
- Calcul automatisé : entretenir ou contrôler la mémorisation de résultats ou l'automatisation de procédures	5 min	- Classe entière - Consigne orale- Réponse écrite (ardoise, brouillon) ou choisie parmi des propositions.	- Débuter par une activité facile, rituelle pour focaliser l'attention (ex : le furet) - Procédé La Martinière avec correction immédiate de chaque résultat ou correction différée.

Dans ce type de séance, la rapidité est de mise car, l'objectif est de maîtriser un répertoire avec sûreté.

Les moments de réflexion permettent de concevoir des méthodes et de comparer leur efficacité

Sur un temps plus long (10 à 20 min)

Avec l'aide

- de l'écrit (calculs intermédiaires, recherches)

- du dessin (constellations, groupements ...)

- d'outils adaptés (tableaux, bandes, supports)

Objectif	Durée	Dispositif	Commentaires
- Calcul réfléchi : concevoir des méthodes et comparer leur efficacité	10 à 20 min	Classe entière Support de travail (cahier d'essai, fiche outil, ...)	- Pour chaque question, laisser un temps de recherche aux élèves. - Exposé des procédures (au tableau), discussion et justification.
L'élève garde le choix de la procédure qu'il va utiliser			